

Exploitation des Méthodes des Sous-espaces pour l'Identification des Systèmes Linéaires

Samia TALMOUDI BEN AOUN^{#1} ET Abdennacer BEN MESSAOUD^{#2}

Laboratoire Analyse, Conception et Commande des Systèmes

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, BP 37, 1002 TUNIS LE BELVEDERE

¹samia_talmoudi@yahoo.fr

²abdennacer_messa@yahoo.fr

Résumé— Cet article met en évidence l'intérêt de l'utilisation des méthodes des sous-espaces pour l'identification des systèmes linéaires. Ces méthodes permettent d'estimer directement une réalisation quelconque de la représentation d'état d'un système à partir des mesures de ces entrées-sorties. Une étude comparative des performances apportées par les méthodes des sous-espaces avec celles des méthodes classiques est effectuée sur deux exemples de simulation, à savoir, un système monovarié et un système multivarié.

Mots-clés : Identification des systèmes, méthodes des sous-espaces, représentation d'état.

I. INTRODUCTION

La construction et l'utilisation des modèles constituent des étapes incontournables pour des nombreuses disciplines scientifiques et technologiques (physique, chimie, biologie, ...). En effet, La modélisation permet, de formaliser, au moins dans un certain domaine de fonctionnement, le comportement du processus étudié à l'aide d'un modèle, à partir duquel il est possible de comprendre, commander ou améliorer le fonctionnement du procédé analysé.

Plusieurs approches permettent de modéliser un système. Parmi ces approches, on peut trouver les méthodes d'identification d'erreur de prédiction et les méthodes des sous espaces. Ces méthodes sont capables de fournir une représentation d'état du modèle identifié sans utiliser une paramétrisation explicite du modèle.

L'article est organisé comme suit. Après avoir introduit le problème de l'identification des sous-espaces, on définit les notions et les matrices du système. Les principaux algorithmes des sous-espaces se présentent au sein de la section 4. Ensuite, une attention particulière est apportée à la méthode N4SID suivi par une présentation du théorème unifié de B. De Moor et P. Van Overschee [1, 2]. Enfin, une comparaison des performances des méthodes des sous-espaces (la méthode N4SID) avec celles des méthodes PEM est faite sur deux exemples de simulation (cas monovarié et cas multivarié).

II. POSITION DU PROBLÈME

En supposant que le système que l'on cherche à identifier appartient à la classe des systèmes linéaires et invariants dans le temps, le problème d'identification traité par les techniques d'identification des sous-espaces peut se formuler comme suit :

Etant donné N échantillons des entrées $u(k) \in \mathcal{R}^m$ et des sorties $y(k) \in \mathcal{R}^l$ d'un système dont on cherche à approcher le comportement en sortie par un modèle d'état défini par :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ke(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + e(k) \quad (2)$$

où $x(k) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$ est la matrice gain d'innovation de Kalman et $e(k) \in \mathcal{R}^l$ est un vecteur de bruits blancs dont la matrice d'auto-covariance est donnée par $E\{e(i)e(j)^T\} = R_e \delta_{ij}$ avec δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

On suppose que :

- la paire (A, C) est observable ;
- la paire $(A, [B \ K])$ est commandable ;
- le système est asymptotiquement stable i.e. les valeurs propres de A sont strictement situées à l'intérieur du cercle unité.

On cherche alors à déterminer :

- l'ordre n du modèle ;
- de manière consistante, les matrices du système

$$A \in \mathcal{R}^{n \times n}, B \in \mathcal{R}^{n \times m}, C \in \mathcal{R}^{l \times n}, D \in \mathcal{R}^{l \times m} \text{ et } K \in \mathcal{R}^{n \times l}.$$

L'identification de ce système par la méthode des sous-espaces nécessite des écritures matricielles obtenues par "empilement" des équations d'état. Ces écritures font appel à des matrices particulières dont la définition est précisée dans la section qui suit. On y expose aussi les méthodes de projections.

III. DEFINITIONS

A. Matrices Relatives aux Signaux

Dans les algorithmes d'identification des sous-espaces, tous les signaux (entrées, sorties et bruits) s'arrangent dans des matrices de Hankel. Disposant de $N = j + h + i + 2$ mesures des entrées avec $j \gg i > n$ et $j \gg h > n$.

On construit la matrice de Hankel des entrées suivante :

$$\begin{pmatrix} U_p \\ U_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(j-1) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(i-1) & u(i) & \dots & u(i+j-2) \\ u(i) & u(i+1) & \dots & u(i+j-1) \\ u(i+1) & u(i+2) & \dots & u(i+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(i+h-1) & u(i+h) & \dots & u(i+h+j-2) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Où $U_p \in \mathfrak{R}^{mixj}$ est la matrice de Hankel des entrées passées et $U_f \in \mathfrak{R}^{mixj}$ est la matrice des entrées futures.

Une définition similaire est donnée pour la sortie $Y_p \in \mathfrak{R}^{lixj}$, $Y_f \in \mathfrak{R}^{lixj}$ et pour le bruit $E_p \in \mathfrak{R}^{lixj}$, $E_f \in \mathfrak{R}^{lixj}$.

B. Matrices des séquences d'état

La matrice des séquences d'état X_k est définie par un empilement des états sur un horizon d'amplitude j et débutant à l'instant k :

$$X_k = (x(k) \quad x(k+1) \quad \dots \quad x(k+j-1)) \in \mathfrak{R}^{n \times j}$$

La matrice des séquences d'état passé X_p correspond à $k=0$ et celle des séquences d'état futur X_f est obtenue en posant $k=i$.

C. Matrices liées aux paramètres du système

La matrice d'observabilité étendue Γ_k est une extension de la matrice d'observabilité pour un nombre de bloc ligne supérieure à l'ordre du système $k > n$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{lk \times n}$$

De même, les matrices de contrôlabilité rebours d'ordre k de la partie déterministe du système Δ_k^d et de la partie stochastique du système Δ_k^s sont respectivement définies par :

$$\Delta_k^d = (A^{k-1}B \quad A^{k-2}B \quad \dots \quad B) \quad (4)$$

$$\Delta_k^s = (A^{s-1}K \quad A^{s-2}K \quad \dots \quad K) \quad (5)$$

Les matrices de Toeplitz inférieure, composées des paramètres de Markov, de la partie déterministe du système H_k^d et de la partie stochastique du système H_k^s sont respectivement définies par :

$$H_k^d = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{k-2}B & CA^{k-3}B & \dots & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{lk \times mk} \quad (6)$$

$$H_k^s = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ CK & I & \dots & 0 \\ CAK & CK & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{k-2}K & CA^{k-3}K & \dots & I \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{lk \times lk} \quad (7)$$

D. Définition des projections

La projection orthogonale de l'espace engendré par les lignes de la matrice A sur le noyau des lignes de la matrice B sera notée par :

$$A/B^\perp = A\Pi_{B^\perp} \quad (8)$$

$$\Pi_{B^\perp} = I - B^T(BB^T)^\dagger B \quad (9)$$

Où X^\dagger est le pseudo inverse de Moore-Penrose de la matrice X .

La projection oblique de l'espace engendré par les lignes de la matrice A sur l'espace engendré par les lignes de la matrice B selon la direction de l'espace engendré par les lignes de la matrice C est donnée par :

$$A/B_c = A\Pi_{C^\perp} (B\Pi_{C^\perp})^\dagger B \quad (10)$$

IV. EMPILEMENT DES EQUATIONS D'ETAT

Des équations (1) et (2), on en déduit les relations suivantes qui font appel aux matrices définies précédemment [1] :

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i^d U_p + H_i^s E_p \quad (11)$$

$$Y_f = \Gamma_h X_f + H_h^d U_f + H_h^s E_f \quad (12)$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i^d U_p + \Delta_i^s E_p \quad (13)$$

IV. LES PRINCIPAUX ALGORITHMES DES SOUS-ESPACES

Les principaux algorithmes des sous-espaces sont le N4SID (Numerical Subspace based State-Space System Identification) [2], le CVA (Canonical Variate Analysis) [3] et le MOESP (MIMO Output-Error State sPace model identification) [4]. Elles recherchent toutes les trois à estimer un espace ligne ou colonne particulier en ajustant ce sous-espace aux données d'entrée-sortie à l'aide d'outils mathématiques robustes (DVS et RQ) et des constatations géométriques simples. Elles se divisent en deux classes (fig.1):

- Les algorithmes MOESP recherchent une estimée consistante de la matrice d'observabilité étendue du système à partir des données d'entrée-sortie mesurées. Les matrices d'état du système sont alors extraites en deux temps, en utilisant la propriété d'A-invariance de la matrice d'observabilité étendue pour A et C puis une régression linéaire classique pour B , D et K [4].
- N4SID et CVA cherchent également à estimer la matrice d'observabilité étendue du procédé mais y ajoute une phase d'estimation de l'état du système [1, 3, 4]. En ajoutant cette étape d'estimation, les matrices d'état sont obtenues en une

seule phase à l'aide d'un critère quadratique minimisable via les moindres carrés [1, 5].

Dans la section suivante, on présentera plus particulièrement l'algorithme N4SID. Pour les deux autres algorithmes, le lecteur intéressé pourra étudier les références [3, 4, 6, 7].

VI. L'ALGORITHME N4SID

L'idée de base des méthodes d'identification des sous-espaces est de retrouver le terme $\Gamma_h X_f$ de l'équation (12) permettant d'estimer la matrice d'observabilité étendue Γ_h et la matrice des séquences d'état X_f par une décomposition en valeurs singulières (DVS) de $\Gamma_h X_f$.

L'algorithme N4SID extrait le terme en question par l'application d'une projection oblique des sorties futures (cf. équ. (12)) sur les observations passées selon les directions des entrées futures donnant :

$$\begin{aligned} Y_f / \Xi &= (\Gamma_h X_f + H_h^d U_f + H_h^s E_f) / \Xi \\ &= \Gamma_h X_f / \Xi + H_h^d U_f / \Xi + H_h^s E_f / \Xi \end{aligned} \quad (14)$$

Où : $\Xi = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix}$ est la matrice des observations passées.

Or, de la définition de la projection oblique, il est évident que :

$$U_f / \Xi = 0 \quad (15)$$

Et puisque, et pour un nombre d'échantillons tend vers l'infini tout en sachant que les entrées passées ainsi que les sorties passées sont décorrélées du bruit future :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_f / \Xi = 0 \quad (16)$$

On obtient :

$$Y_f / \Xi = \Gamma_h X_f / \Xi \quad (17)$$

A partir des équations (11) et (13), il est facile de montrer que :

$$X_f = (A^i \Gamma_i^* \quad (\Delta_i^d - A^i \Gamma_i^* H_i^d) \quad (\Delta_i^s - A^i \Gamma_i^* H_i^s)) \begin{pmatrix} Y_p \\ U_p \\ E_p \end{pmatrix} \quad (18)$$

Pour calculer une estimée de X_f , le terme de bruit peut être remplacé par sa valeur moyenne qui est nulle :

$$\hat{X}_f = (A^i \Gamma_i^* \quad (\Delta_i^d - A^i \Gamma_i^* H_i^d)) \begin{pmatrix} Y_p \\ U_p \end{pmatrix} \quad (19)$$

La projection oblique de la matrice des séquences d'état future sur les observations passées selon les directions des entrées futures, donne donc :

$$X_f / \Xi = \hat{X}_f \quad (20)$$

Et par suite, la projection oblique des sorties futures sur les observations passées selon les directions des entrées futures, a pour résultat :

$$Y_f / \Xi = \Gamma_h \hat{X}_f \quad (21)$$

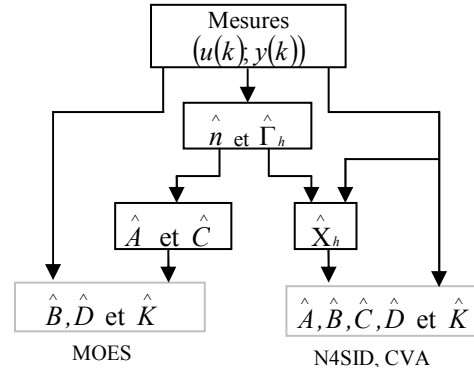


Fig. 1 : Etapes d'identification des méthodes des sous-espaces

Il est à noter que le calcul du produit Y_f / Ξ est généralement

effectué à partir de la factorisation RQ suivante :

$$\begin{pmatrix} U_p \\ U_f \\ Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} = RQ = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad (22)$$

La matrice en question est donnée, donc, par :

$$Y_f / \Xi = (L_{U_p} \quad L_{Y_p}) \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} \quad (23)$$

où :

$$(L_{U_p} \quad L_{U_f} \quad L_{Y_p}) = (R_{41} \quad R_{42} \quad R_{43}) \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}^\dagger \quad (24)$$

Pour extraire \hat{X}_f et une estimation de Γ_h , une application de la DVS donne :

$$Y_f / \Xi = (U_d \quad U_s) \begin{pmatrix} \Sigma_d & 0 \\ 0 & \Sigma_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_d \\ V_s \end{pmatrix} = U_d \Sigma_d V_d + U_s \Sigma_s V_s \quad (25)$$

Une estimation de la matrice d'observabilité étendue est donc directement accessible à partir du sous-espace signal

$$U_d \Sigma_d V_d : \hat{\Gamma}_h = U_d \Sigma_d^{1/2} \quad (26)$$

$$\text{et : } \hat{X}_f = \hat{\Gamma}_h^\dagger Y_f / \Xi \quad (27)$$

Il est à noter que :

- Pour choisir la troncature entre Σ_d et Σ_s , la plus simple des solutions consiste à rechercher l'écart le plus important entre les différentes valeurs singulières successives.
- L'ordre du modèle d'état n'est que le rang du sous-espace système Σ_d .

Estimation des matrices d'état

L'algorithme N4SID utilise la stratégie fondée sur l'estimée de la matrice des séquences d'état pour estimer les matrices du

système A , B , C et D ainsi que le gain de Kalman K . Il s'agit de résoudre, par la méthode des moindres carrés, le système d'équation surdimensionné suivant :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}(i+1) & \hat{x}(i+2) & \dots & \hat{x}(i+j-1) \\ y(i) & y(i+1) & \dots & y(i+j-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(i) & \hat{x}(i+1) & \dots & \hat{x}(i+j-2) \\ u(i) & u(i+1) & \dots & u(i+j-2) \end{pmatrix} + \varepsilon \quad (28)$$

En notant : $\theta = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$;

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}(i+1) & \hat{x}(i+2) & \dots & \hat{x}(i+j-1) \\ y(i) & y(i+1) & \dots & y(i+j-2) \end{pmatrix} ; \quad (29)$$

et $\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \hat{x}(i) & \hat{x}(i+1) & \dots & \hat{x}(i+j-2) \\ u(i) & u(i+1) & \dots & u(i+j-2) \end{pmatrix} \quad (30)$

La solution au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\theta = \mathcal{Y}\mathcal{X}^\dagger = \mathcal{Y}\mathcal{X}^T(\mathcal{X}\mathcal{X}^T)^{-1} \quad (31)$$

Le gain de Kalman K et la matrice de covariance R_e sont extraits de l'estimée de la covariance des résidus :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{j - (\hat{n} + m)(\hat{n} + l)} \varepsilon \varepsilon^T \quad (32)$$

avec : $\varepsilon = \mathcal{Y} - \theta\mathcal{X}$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \begin{pmatrix} Ke(k) \\ e(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (Ke(k))^T & e^T(k) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \begin{pmatrix} Ke(k)e^T(k)K^T & Ke(k)e^T(k) \\ e(k)e^T(k)K^T & e(k)e^T(k) \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} KR_eK^T & KR_e \\ R_eK^T & R_e \end{pmatrix} \quad (33) \end{aligned}$$

D'où : $K = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ et $R_e = \Sigma_{22} \quad (34)$

V. THÉORÈME UNIFIÉ

B. De Moor et P. Van Overschee, dans leur célèbre théorème unifié [8], ont démontré que les principaux algorithmes des sous-espaces partagent une même et unique écriture (cf. tableau I) :

$$W_1 O_h W_2$$

Ce qui permet de mettre en évidence que les algorithmes N4SID, PI MOESP (Past Input MIMO Output-Error State sSpace model identification), PO MOESP (Past Output MIMO Output-Error State sSpace model identification) [4] et CVA (Canonical Variate Analysis) [3] possèdent la même matrice O_h :

$$O_h = Y_f \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T$$

Cette propriété permet de bien comprendre les actions respectives de la projection orthogonale $\Pi_{U_f^\perp}$ et de la

variable dite instrumentale Ξ . En effet, puisque :

$$Y_f = \Gamma_h X_f + H_h^d U_f + H_h^s E_f$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} Y_f \Pi_{U_f^\perp} &= \Gamma_h X_f \Pi_{U_f^\perp} + \underbrace{H_h^d U_f \Pi_{U_f^\perp}}_0 + H_h^s E_f \Pi_{U_f^\perp} \\ &= \Gamma_h X_f \Pi_{U_f^\perp} + H_h^s E_f \Pi_{U_f^\perp} \quad (34) \end{aligned}$$

correspond simplement à la suppression du régime forcé. En post multipliant cette expression par Ξ^T , en supposant que les entrées futures et passées ainsi que les sorties passées soient décorréliées du bruit futur, il est facile de vérifier que :

$$Y_f \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T = \Gamma_h X_f \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T + \underbrace{H_h^s E_f \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T}_0 = \Gamma_h X_f \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T \quad (35)$$

puisque [9] :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_f \Pi_{U_f^\perp} U_p^T = E\{e_f u_p^T\} - E\{e_f u_f^T\} E\{(u_f u_f^T)^{-1}\} E\{u_f u_p^T\} = 0$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_f \Pi_{U_f^\perp} Y_p^T = E\{e_f y_p^T\} - E\{e_f u_f^T\} E\{(u_f u_f^T)^{-1}\} E\{u_f y_p^T\} = 0$$

TABLEAU I : ÉCRITURE UNIFIÉE DES ALGORITHMES DES SOUS-ESPACES.

	W_1	O_h	W_2
N4SID	I	$Y_f \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T$	$\left(\Xi \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T \right)^{-1} \Xi$
PI/PO MOESP (*) ¹	I	$Y_f \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T$	$\left(\Xi \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T \right)^{-1} \Xi \Pi_{U_f}$
CVA	$\mathcal{R}^{-1/2}$ $\left\{ y_f \Pi_{U_f^\perp}, y_f \Pi_{U_f} \right\}$ 2	$Y_f \Pi_{U_f^\perp} \Xi^T$	$\mathcal{R}^{-1/2}$ $\left\{ \Xi \Pi_{U_f^\perp}, \Xi \Pi_{U_f} \right\}$

VI. EXEMPLES DE SIMULATION

Dans cette section, on va comparer les performances des méthodes des sous-espaces avec celles des méthodes PEM (structure ARMAX dans le cas monovarié et structure ARX dans le cas multivarié).

Deux types de systèmes sont considérés, à savoir, un système monovarié et un système multivarié.

A. Etude d'un système monovarié

Considérons le système linéaire et invariant d'ordre 2 suivant, [10] :

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ -0.7 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.12 \end{pmatrix} e(k) \\ y(k) = (1 \ 0) x(k) + e(k) \end{cases} \quad (36)$$

L'entrée $u(k)$ est un signal binaire pseudo-aléatoire (SBPA) générée pour 500 échantillons. Le bruit $e(k)$ est également

¹ $\Xi = U_p$ pour PI MOESP et $\Xi = \begin{pmatrix} U_p^T & Y_p^T \end{pmatrix}$ pour OP MOESP.

² $R_{\{M,N\}}$ étant la covariance entre les matrices $M \in \mathfrak{R}^{m \times j}$ et $N \in \mathfrak{R}^{m \times j}$: $R_{\{M,N\}} = \lim_{j \rightarrow \infty} (MN^T)$.

une séquence binaire pseudo-aléatoire de variance σ^2 dans $\{0.01, 1\}$.

On a appliqué la méthode d'erreur de prédiction structure ARMAX avec $n_a = 2$, $n_b = 2$ et $n_c = 2$; et l'algorithme des sous-espaces N4SID avec $n = 2$ et $i = h = 3$.

La figure.2 illustre, en fonction du nombre d'échantillons ($N=100$, $N=200$ et $N=500$) et pour une variance de bruit faible et égale à 0.01, les évolutions de l'erreur relative de la réponse indicielle des modèles estimés, respectivement, par l'algorithme N4SID et par la méthode PEM (structure ARMAX) par rapport à la réponse indicielle du système réel. On observe bien sur cette figure que l'erreur relative s'améliore en fonction du nombre d'échantillons. On remarque aussi, et pour deux niveaux de bruit, qu'une nette amélioration est apportée par la méthode N4SID (cf. tableau 2).

TABLEAU II : VALEUR MOYENNE DE L'ERREUR RELATIVE (%), ARMAX ET N4SID ($i = h = 3$) (CAS MONOVARIABLE).

	Valeur moyenne de l'erreur %					
	$\sigma^2 = 0.01$			$\sigma^2 = 1$		
	$N=100$	$N=200$	$N=500$	$N=100$	$N=200$	$N=500$
ARMAX	0.9136	0.3722	0.0367	9.0863	3.9534	0.3103
N4SID (3 3)	0.9080	0.3472	0.0145	9.3556	3.8162	0.2728

Ensuite, On a essayé tantôt de fixer l'indice i en variant l'indice h et tantôt de fixer l'indice h en variant l'indice i à condition de ne pas dépasser les valeurs maximales tolérées par l'algorithme N4SID du Matlab ($N > (m+l+1)(i+h)$) pour chaque nombre d'échantillons et pour chaque valeur de variance du bruit.

Les courbes montrant les valeurs minimales de l'erreur relative pour un nombre d'échantillons $N=500$ et pour chaque valeur de variance du bruit sont illustrées respectivement sur les figures 3 et 4. Ces courbes indiquent que le choix des paramètres de construction influe directement sur la qualité de l'estimation.

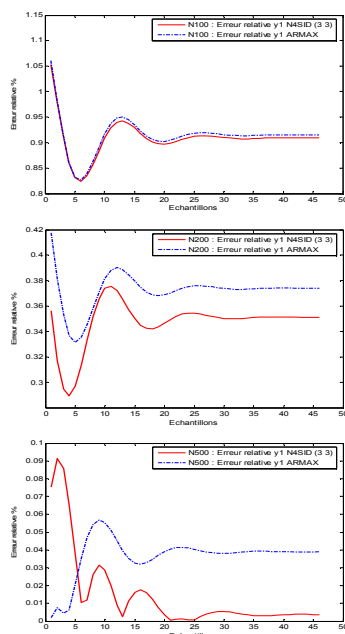


Fig.2 : Variation de l'erreur relative (%), ARMAX et N4SID ($i = h = 3$), $\sigma^2 = 0.01$, (cas monovisible).

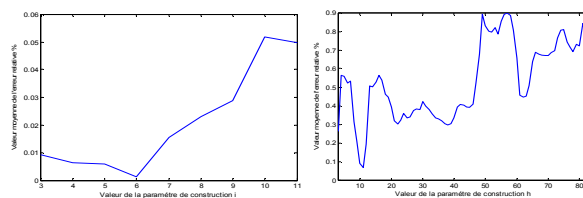


FIG.3 (GAUCHE): ÉVOLUTION DE LA MOYENNE DE L'ERREUR RELATIVE (%) POUR $h = 155$ ET $i \in [3, 11]$, $N = 500$ ET $\sigma^2 = 0.01$

FIG.4 (DROITE): ÉVOLUTION DE LA MOYENNE DE L'ERREUR RELATIVE (%) POUR $i = 83$ ET $h \in [3, 83]$, $N = 500$ ET $\sigma^2 = 1$.

Le tableau III, fait apparaître les valeurs des minimums globaux. Ces résultats montrent que l'algorithme N4SID donne des résultats performants si les paramètres de construction i et h sont bien choisis.

TABLEAU III : MINIMUMS GLOBAUX DE LA VALEUR MOYENNE DE L'ERREUR RELATIVE (%) OBTENUS PAR L'ALGORITHME N4SID (CAS MONOVARIABLE).

	Valeur moyenne de l'erreur %					
	$\sigma^2 = 0.01$			$\sigma^2 = 1$		
	$N=100$	$N=200$	$N=500$	$N=100$	$N=200$	$N=500$
N4SID (03 16)	0.8184	-	-	-	-	-
N4SID (03 47)	-	0.2854	-	-	-	-
N4SID (155 06)	-	-	0.0014	-	-	-
N4SID (03 29)	-	-	-	4.2604	-	-
N4SID (03 63)	-	-	-	-	1.9399	-
N4SID (11 83)	-	-	-	-	-	0.0671

B. Etude d'un système multivariable

Pour comparer les performances des méthodes des sous-espaces avec celles des méthodes PEM dans un cas multivariable, on a considéré le système multivariable d'ordre 4 suivant [11] :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ke(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) + e(k) \end{cases} \quad (36)$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ -0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.603 & -0.603 \\ 0 & 0 & 0.603 & -0.603 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1.1650 & -0.6965 \\ 0.6268 & 1.6961 \\ 0.0751 & 0.0591 \\ 0.3516 & 1.7971 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.2641 & -1.4462 & 1.2460 & 0.5774 \\ 0.8717 & -0.7012 & -0.6390 & -0.3600 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -0.1356 & -1.2704 \\ -1.3493 & 0.9846 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0.1242 & -0.0895 \\ -0.0828 & -0.0128 \\ 0.0390 & -0.0968 \\ -0.0225 & 0.1459 \end{pmatrix}$$

et $e \in \mathcal{R}^{2 \times 1}$ est l'erreur d'innovation dont sa matrice de covariance est donnée par :

$$\text{cov}(e) = \begin{pmatrix} 0.0176 & -0.0267 \\ -0.0267 & 0.0497 \end{pmatrix}$$

On a généré $N = 1000$ entrées et sorties du système. Les entrées $u(k)$ sont des bruits blancs de moyenne nulle et de variance unitaire.

Les entrées $e(k)$ choisis sont aussi des bruits blancs de moyenne nulle dont leur matrice de covariance est égale à celle donnée par l'équation (3.5).

On a essayé dans ce cas d'appliquer la méthode d'erreur de prédiction structure ARX avec $n_a = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $n_b = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$; et

l'algorithme des sous-espaces N4SID avec $n = 4$ et $i = h = 5$. Les résultats d'une étude de l'influence du nombre d'échantillons sur la qualité de l'estimation se récapitulent dans le tableau IV où l'erreur de prédiction (EP) est donnée par [FMO00] :

$$ep = 100 \cdot \frac{1}{l} \cdot \sum_{i=1}^l \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_v} (y_i(k) - y_i^e(k))^2}{\sum_{k=1}^{N_v} (y_i(k))^2}}$$

avec : l est le nombre des sorties, N_v est le nombre des échantillons utilisées pour la validation, $y_i(k)$ est la sortie du système et $y_i^e(k)$ est la sortie de l'estimée.

Ces résultats indiquent que la qualité de l'estimation par l'algorithme N4SID est la meilleure pour tous les nombres d'échantillons. Tandis que le taux d'amélioration de l'estimée par la méthode PEM est faible malgré l'augmentation du nombre d'échantillons de 500 à 1000.

Le choix des indices i et h influe aussi bien sur la qualité de l'estimation (cf. tableau V).

TABLEAU IV : VALEUR MOYENNE DE L'ERREUR RELATIVE (%) ET ERREUR DE PREDICTION (%), ARX ET N4SID ($i = h = 5$) (CAS MULTIVARIABLE).

		N=200		N=500		N=1000	
		VM(*)	EP(**)	VM	EP	VM	EP
ARX	y1u1	4.6794	2.1014	1.1669	1.8607	0.5356	1.7463
	y1u2	2.4990		1.2501		1.2280	
	y2u1	7.3836		4.6783		2.9596	
	y2u2	3.0531		1.2196		1.3113	
N4SID (5 5)	y1u1	0.2598	1.3722	0.5998	0.8819	0.1177	0.2059
	y1u2	0.8876		0.1915		0.0700	
	y2u1	0.7467		0.4790		0.4714	
	y2u2	3.1286		1.6882		0.9810	

(*) Valeur moyenne de l'erreur relative.

(**) Erreur de prédiction.

TABLEAU V : MINIMUMS GLOBAUX DE L'ERREUR DE PREDICTION (%) ET VALEURS MOYENNE DE L'ERREUR RELATIVE (%) OBTENUS PAR L'ALGORITHME N4SID (CAS MULTIVARIABLE).

		N=200		N=500		N=1000	
		VM	EP	VM	EP	VM	EP
N4SID (21 12)	y1u1	0.3383	0.7	-	-	-	-
	y1u2	0.5655		-		-	
	y2u1	1.4514		-		-	
	y2u2	1.3714		-		-	
N4SID (05 61)	y1u1	-	-	0.6778	0.5016	-	-
	y1u2	-		0.0393		-	
	y2u1	-		0.0890		-	
	y2u2	-		0.7558		-	
N4SID (05 194)	y1u1	-	-	-	-	0.1461	0.1350
	y1u2	-		-		0.0384	
	y2u1	-		-		0.3906	
	y2u2	-		-		0.4369	

VII. CONCLUSION

Cet article présente les méthodes d'identification des sous-espaces. Ces techniques fournissent une représentation d'état du modèle identifié, à l'aide des algorithmes non itératifs et sans qu'elles demandent de fixer a priori un grand nombre de paramètres : elles sont basées sur un seul indice qui est l'ordre du système.

Elles gèrent de manière équivalente les systèmes monovariabiles et multivariabiles (seules les dimensions des matrices d'état du modèle sont modifiées).

Les résultats du test en simulation semblent révéler que les méthodes des sous-espaces sont meilleures en termes de performances aux méthodes PEM. Une perspective reste également de fournir la façon dont on doit choisir les paramètres de construction i et h .

REFERENCES

- [1] P. Van Overschee, B. De Moor, « *Subspace identification for linear systems : theory, implementation, applications* ». Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] P. Van Overschee and B. De Moor, « N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems ». *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 75-93, 1994.
- [3] W. E. Larimore, « Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control ». In 29th IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, USA, December 1990.
- [4] M. Verhaegen, « Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input-output data ». *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 61-74, 1994.
- [5] L. Ljung, « *System identification : Theory for the user* ». PTR Prentice Hall Information and System Sciences Series. T. Kailath, Series Editor, Upper Saddle River, Second edition, 1999.
- [6] G. Mercère, « Contribution à l'identification récursive des systèmes par l'approche des sous-espace ». PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille. Laboratoire d'Automatique, Génie informatique et Signal (LAGIS), 2004.
- [7] T. Katayama, « *Subspace Methods for System Identification* ». Springer, 2005, ISBN 1852339810.
- [8] P. Van Overschee and B. De Moor, « A unifying theorem for three subspace system identification ». *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1853-1864, 1995.
- [9] M. Viberg, B. Wahlberg and B. Ottersten, « Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting ». *Automatica*, Vol. 33, pp. 1603-1616, 1997.
- [10] M. Viberg, « Subspace-based state-space system identification ». *Circuits Systems Signal Processing*. Vol. 21, No. 1, pp. 23-37, 2002.
- [11] P. Van Overschee, 1996. [Online].
ftp://ftp.esat.kuleuven.ac.be/pub/SISTA/vanoverschee/exemples/sta_demo.m